

1

تصحيح سلسلة تحليلية الجداء السلمي من طرف التلميذ كامل بكر

التمرين الاول:

01.

1. حساب كل من: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BO}$

* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$:

بما أن ABCD مربع فإن $(AB) \perp (BC)$:

و منه $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$:

* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$:

لدينا :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

خلاصة : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$

* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BO}$:

لدينا : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BO} = -\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{BO}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BO})$

$$\begin{aligned} &= -2 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -2 \end{aligned}$$

خلاصة : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BO} = -2$

2. لتبين أن المستقيمين (AE) و (BF) متعامدين :

* من اجل ذلك نبين أن : $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF} = 0$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CF} \\ &= 0 - 2 + 2 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

خلاصة : $(AE) \perp (BF)$

3. تحديد مجموعة النقط M(x,y) من المستوى (P) التي تحقق ما يلي :

- أ. $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = 1$:

لتكن I منتصف [EF]

لدينا :



$$\begin{aligned}
 M(x,y) \in (P) &\Leftrightarrow \overline{ME} \cdot \overline{MF} = 1 \\
 &\Leftrightarrow (\overline{MI} + \overline{IE}) \cdot (\overline{MI} + \overline{IF}) = 1 \\
 &\Leftrightarrow (\overline{MI} + \overline{IE}) \cdot (\overline{MI} - \overline{IE}) = 1 \\
 &\Leftrightarrow \overline{MI}^2 - \overline{IE}^2 = 1 \\
 &\Leftrightarrow \overline{MI}^2 = 1 + \overline{IE}^2 \\
 &\Leftrightarrow \overline{MI}^2 = 1 + 5^2 \\
 &\Leftrightarrow \overline{MI} = \sqrt{26}
 \end{aligned}$$

خلاصة: مجموعة النقط $M(x,y)$ هي الدائرة $C(I, \sqrt{26})$.

- ب $ME^2 + MF^2 = 5$

لتكن I منتصف [EF]

لدينا :

$$ME^2 + MF^2 = 5 \Leftrightarrow \overline{ME}^2 + \overline{MF}^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow (\overline{MI} + \overline{IE})^2 + (\overline{MI} + \overline{IF})^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow \overline{MI}^2 + 2\overline{MI} \cdot \overline{IE} + \overline{IE}^2 + \overline{MI}^2 + 2\overline{MI} \cdot \overline{IF} + \overline{IF}^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow 2\overline{MI}^2 + 2\overline{MI} \cdot (\overline{IE} + \overline{IF}) + \overline{IE}^2 + \overline{IF}^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow 2\overline{MI}^2 + 2\overline{MI} \cdot \vec{0} + \overline{IE}^2 + \overline{IF}^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow 2\overline{MI}^2 + 2\overline{IE}^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow 2\overline{MI}^2 = 5 - 2\overline{IE}^2 = 5 - 2 \times 5^2 = -45; \left(\overline{IE} = \frac{EF}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \overline{MI}^2 = \frac{-45}{2}$$

و هذا غير ممكن : **خلاصة:** مجموعة النقط هي المجموعة الفارغة .

التمرين الثاني:

02

1. تحديد (C) مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوى (P) التي تحقق (E):

لدينا : $(E): x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$

$$(E) \Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 + (y-3)^2 - 9 + 5 = 0$$

$$(E) \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 = \sqrt{5}^2$$

خلاصة: $M(x,y) \in (P) \Leftrightarrow M(x,y) \in C(\Omega(-1,3), \sqrt{5})$

2. تحديد إحداثيات A و B :

* التقاطع مع محور الأفاصيل : $(y = 0)$

نحصل على : $(E): x^2 + 2x + 5 = 0$

وبذلك نحل المعادلة (E)

$\Delta = -16 < 0$ و منه المعادلة (E) ليس لها حل



خلاصة : $e \cap (ox) = \emptyset$

* التقاطع مع محور الأرتياب : $(x = 0)$

نحصل على : $(E): y^2 - 6y + 5 = 0$

و بذلك نحل المعادلة (E)

$y_2 = 5$ و $y_1 = 1$ لها حلان $\Delta = 16 > 0$ ومنه المعادلة (E)

خلاصة : $(e) \cap (oy) = \{A(0,1) ; B(0,5)\}$

3. أ - تحديد المعادلة الديكارتيّة للمماس (T) ل (e) في A :

ليكن : $(T): ax + by + c = 0$

بما أن (T) مماس ل (e) في A فإن $\overrightarrow{\Omega A}(1, -2)$ منظمية عليه

أي $(T): x - 2y + c = 0$

و نعلم أن (T) يمر من A(0,1) إذن : $c = 2$

خلاصة : $(T): x - 2y + 2 = 0$

ب- نجد قيمة مفرقة إلى 0,1 لقياس الزاوية IAB في المثلث IAB .

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BO}) = \frac{\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AI}\| \times \|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}}{4 \times \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0,895$$

ومنه : قياس الزاوية الهندسية IAB هو $26^{\circ}56'$

03. التمرين الثالث:

1. تحديد (e) مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوى (P) التي تحقق

$$M(x,y) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 16$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 16$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = 16$$

$$\Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow MI = 5$$

خلاصة : $M(x,y) \in (P) \Leftrightarrow (x,y) \in e(I,5)$

2. (D) مجموعة النقط $M(x,y)$ من (P) حيث $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 3$

$$M(x,y) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = -4x - 4 + y - 2 = 3$$

$$\Leftrightarrow -4x + y - 9 = 0$$

خلاصة : مجموعة النقط هي المستقيم الذي معادلته : $(D): -4x + y - 9 = 0$



1. لنبين ان المثلث ABC قائم الزاوية في C :

لدينا : $\overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

ومنه : $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

المثلث ABC قائم الزاوية في C : خلاصة :

2. أ- لنبين أن $x^2 + y^2 - 2x - y - \frac{11}{4} = 0$ هي معادلة ديكارتية لـ (C) المحيطة بـ ABC من اجل ذلك نتحقق أن A و B و c تنتمي إلى الدائرة (C) :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 5/2 \end{pmatrix} \in (C) \Leftrightarrow 1 + \frac{25}{4} - 2 - \frac{5}{2} - \frac{11}{4} = 0$$

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix} \in (C) \Leftrightarrow 1 + \frac{9}{4} - 2 + \frac{3}{2} - \frac{11}{4} = 0$$

$$c \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \in (C) \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{4} + 2 - \frac{1}{2} - \frac{11}{4} = 0$$

خلاصة : $x^2 + y^2 - 2x - y - \frac{11}{4} = 0$ هي معادلة ديكارتية لـ (C) المحيطة بـ ABC

ب- تحديد المركز Ω و الشعاع r للدائرة (C) :

لدينا:

$$x^2 + y^2 - 2x - y - \frac{11}{4} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{11}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 2^2$$

$$(C) \left(\Omega \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}; r = 2 \right)$$

خلاصة

3. أ- حساب $d(\Omega ; (\Delta))$:

$$d(\Omega ; (\Delta)) = \frac{|1+1+0|}{\sqrt{1/4+1}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

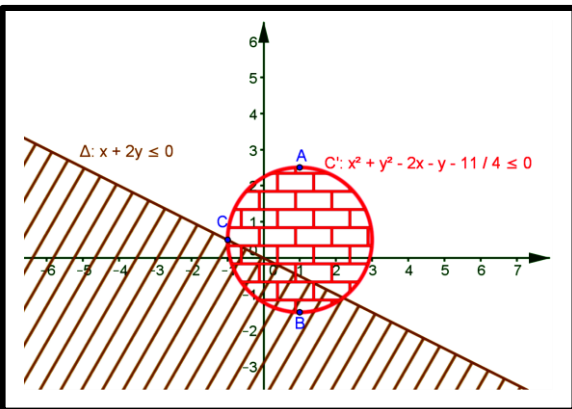
ب- استنتاج الوضع النسبي لـ (C) و (Δ)

$$d(\Omega ; (\Delta)) = \frac{4\sqrt{5}}{5} < 2 \text{ لدينا}$$

المستقيم (Δ) يقطع (C) في نقطتين : خلاصة :

$$. (x; y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - y - \frac{11}{4} \leq 0 \\ x + 2y \leq 0 \end{cases}$$

بالنسبة للمتراحة $x^2 + y^2 - 2x - y - \frac{11}{4} \leq 0$ مجموعة النقط هي القرص المغلق





$$(D) \left(\Omega \left(\frac{1}{1/2} \right); r = 2 \right) \text{ (أي داخل الدائرة و الدائرة)}$$

بالنسبة ل $x + 2y \leq 0$ هي نصف المستوى المغلق الي حافته المستقيم (Δ) و لا يحتوي على النقطة A .
ومنه حل النظمة هو تقاطع القرص و نصف المستوى (أنظر الشكل)

التمرين الخامس :

05.

لنحدد قيمة مقربة لقياس زاوية قذف الكرة لتسجيل الهدف:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{CA \times CB}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} -9 \\ 16.32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \end{pmatrix}}{\sqrt{(16.32)^2 + 9^2}} \times \frac{1}{9\sqrt{2}}$$

$$\approx 0,96$$

ومنه : $\alpha \approx 16^\circ$